MODIFIKASI METODE KING
DENGAN MENGGUNAKAN INTERPOLASI KUADRATIK

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Jurusan Matematika

Oleh:

FITRIYAH RITA
10754000194

UIN SUSKA RIAU

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU

2012

MODIFIKASI METODE KING
DENGAN MENGGUNAKAN INTERPOLASI KUADRATIK

FITRIYAH RITA
10754000194

Tanggal Sidang : 28 Juni 2012
Tanggal Wisuda : Oktober 2012

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Metode king merupakan metode iterasi dengan orde konvergensi ke-empat untuk menyelesaikan persamaan nonlinier. Oleh karena kecepatan sebuah metode bergantung kepada orde konvergensinya dalam meminimalkan jumlah iterasi, maka pada skripsi ini penulis memodifikasi metode king dengan menggunakan interpolasi kuadratik guna meningkat orde konvergensi. Berdasarkan hasil penelitian, modifikasi metode king dengan menggunakan interpolasi kuadratik menghasilkan tiga persamaan dengan orde konvergensi ketujuh.

Katakunci: Interpolasi kuadratik, Metode king, Orde Konvergensi.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil'alamin, puji syukur penulis ucapkan kehadirat Allah SWT atas segala limpahan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir dengan judul **"MODIFIKASI METODE KING DENGAN MENGGUNAKAN INTERPOLASI KUADRATIK"**. Penulisan tugas akhir ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat dalam rangka menyelesaikan studi Strata 1 (S1) di UIN Suska Riau. Shalawat beserta salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, mudah-mudahan kita semua selalu mendapat syafa'at dan dalam lindungan Allah SWT amin.

Dalam penyusunan dan penyelesaian Tugas akhir ini, penulis tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak, baik langsung maupun tidak langsung. Untuk itu, penulis mengucapkan terimakasih yang tak terhingga kepada kedua orang tua tercinta ayahanda dan ibunda yang tidak pernah lelah dalam mencurahkan kasih sayang, perhatian, do'a, dan dukungan untuk menyelesaikan tugas akhir ini. Selanjutnya ucapan terimakasih kepada :

1. Bapak Prof. Dr. H. M. Nazir Karim, M.A selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Ibu Dra. Hj. Yenita Morena, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Sri Basriati, M.Sc selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Ibu Fitri Aryani, M.Sc, selaku koordinator tugas akhir.
5. Bapak Wartono, Msc, selaku pembimbing yang telah banyak membantu, mengarahkan, mendukung, dan membimbing penulis dengan penuh kesabarannya dalam penulisan tugas akhir ini.
6. Bapak Mohammad Soleh, M.Sc selaku penguji I yang telah banyak membantu, memberikan kritikan dan saran serta dukungan dalam penulisan tugas akhir ini.

7. Bapak Nilwan Andiraja, M.Sc selaku penguji II yang telah banyak membantu, mendukung dan memberikan saran dalam penulisan tugas akhir ini.
8. Semua dosen-dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan dukungan serta saran dalam menyelesaikan tugas akhir ini.
9. Teman-teman seperjuangan angkatan 2007 di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim.
10. Semua pihak yang telah memberikan dukungan kepada penulis dalam proses penulisan tugas akhir ini hingga selesai yang tidak dapat penulis sebutkan namanya satu persatu.

Dalam penyusunan tugas akhir ini penulis telah berusaha semaksimal mungkin. Walaupun demikian tidak tertutup kemungkinan adanya kesalahan dan kekurangan baik dalam penulisan maupun dalam penyajian materi. Untuk itu penulis mengharapkan kritik dan saran dari berbagai pihak demi kesempurnaan tugas akhir ini.

Pekanbaru, 28 Juni 2012

Fitriyah Rita

DAFTAR ISI

		Halaman
LEMBAR PERSETUJUAN		ii
LEMBAR PENGESAHAN		iii
LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL		iv
LEMBAR PERNYATAAN		v
LEMBAR PERSEMBAHAN		vi
ABSTRAK		vii
ABSTRACT		viii
KATA PENGANTAR		ix
DAFTAR ISI		xi
DAFTAR TABEL		xiii
DAFTAR SIMBOL		xiv
DAFTAR SINGKATAN		xv
DAFTAR LAMPIRAN		xvi
BAB I	PENDAHULUAN	
	1.1 Latar Belakang Masalah	I-1
	1.2 Rumusan Masalah	I-3
	1.3 Batasan Masalah	I-3
	1.4 Tujuan Penelitian	I-3
	1.5 Manfaat Penulisan	I-3
	1.6 Sistematika Penulisan	I-3
BAB II	LANDASAN TEORI	
	2.1 Deret Taylor	II-1
	2.2 Orde Hampiran	II-4
	2.3 Orde Konvergensi	II-5
	2.4 Metode Newton dan Orde Konvergensinya	II-7
	2.5 Metode King dan Orde Konvergensinya	II-9
	2.6 Interpolasi	II-12
	2.6.1 Intrepolasi linier	II-12

2.6.2 Interpolasi Kuadratik II-13

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Metode Penelitian... III-1

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Modifikasi Metode King IV-1

4.2 Analisa Konvergensi IV-4

4.3 Simulasi Numerik... IV-8

BAB V KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan.. V-1

5.2 Saran V-2

DAFTAR PUSTAKA xvii

LAMPIRAN

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

DAFTAR TABEL

Tabel **Halaman**

2.1 Hasil Iterasi dan COC Metode Newton dengan Akar Tunggal II-6

2.2 Hasil Iterasi Metode Newton dengan Akar Ganda II-7

4.1 Perbandingan Jumlah Iterasi IV-9

4.2 Perbandingan Nilai COC IV-10

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Para ilmuwan di bidang sains dan teknik sering dihadapkan dengan sebuah permasalahan matematis yang rumit, permasalahan tersebut biasanya berbentuk persamaan non linier yang melibatkan bentuk trigonometri, eksponensial, logaritma, dan fungsi transenden lainnya. Salah satu persoalan pada persamaan nonlinier adalah menentukan akar-akar persamaan. Oleh karena itu, solusi eksak sering tidak dijumpai, maka hampiran ditentukan dengan menggunakan metode iteratif.

Metode iteratif yang sering digunakan dalam menyelesaikan persamaan nonlinier adalah *Metode Newton* dengan orde konvergensi berbentuk kuadratik dengan bentuk umum

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad ; \quad f'(x_n) \neq 0 \tag{1.1}$$

Seiring dengan kemajuan teknologi, saat ini banyak dikembangkan berbagai metode yang tujuannya mempercepat menemukan solusi dengan galat yang kecil. Oleh karena kecepatan sebuah metode bergantung kepada orde konvergensinya dalam meminimalkan jumlah iterasi, maka pada tahun 1973 F. King Richard mengembangkan suatu metode numerik dengan orde konvergensi ke empat yang bentuk umumnya adalah:

$$x_{n+1} = y_n - \frac{f(x_n) + \beta f(y_n)}{f(x_n) + (\beta - 2) f(y_n)} \frac{f(y_n)}{f'(x_n)} \tag{1.2}$$

dengan

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1.3}$$

yang selanjutnya dikenal dengan metode King. Dengan mengambil $\beta = -0.5$ maka pada persamaan (1.2) menjadi

$$x_{n+1} = y_n - \frac{2f(x_n) - f(y_n)}{2f(x_n) - 5f(y_n)} \frac{f(y_n)}{f'(x_n)} \tag{1.4}$$

dengan y_n ditunjukan persamaan (1.3).

Seiring berjalannya waktu, beberapa peneliti telah mengembangkan metode King diantaranya Beny Neta (1979), Linke How (2010), serta Xiaou Li (2010). Selain metode di atas, para peneliti banyak yang telah menemukan berbagai metode lainnya seperti Kou (2006) yang mengembangkan metode Jarrat orde empat dari Argyros (1994) dengan bentuk

$$x_{n+1} = x_n - Jf \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1.5}$$

dengan

$$Jf = \frac{3f'(y_n) + f'(x_n)}{6f'(y_n) - 2f'(x_n)}$$

dan

$$y_n = x_n - \frac{2}{3}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

menjadi Jarrat orde enam dengan menggunakan dua tahap iterasi yang melibatkan interpolasi linier dengan bentuk

$$z_n = x_n - Jf \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

dan

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{\frac{3}{2} Jf(x_n) f'(y_n) + (1 - \frac{3}{2} Jf(x_n)) f'(x_n)} \tag{1.6}$$

dan oleh Chun (2007) dikembangkan lagi dengan menggunakan tiga tahap iterasi yang melibatkan interpolasi kuadratik dan menghasilkan metode Jarrat orde enam dengan bentuk

$$z_n = x_n - Jf \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

dan

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{a(z_n - x_n)(z_n - y_n) + \frac{3}{2} Jf(x_n) f^{'}(y_n) + (1 - \frac{3}{2} Jf(x_n)) f^{'}(x_n)} \quad (1.7)$$

Berdasarkan apa yang dilakukan peneliti tersebut, penulis tertarik untuk mengembangkan persamaan (1.4) dengan menggunakan interpolasi kuadratik.

1.2 Rumusan Masalah

Perumusan masalah pada tugas akhir ini adalah bagaimana bentuk serta orde konvergensi dari persamaan (1.4) setelah dimodifikasi dengan menggunakan interpolasi kuadratik.

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah pada tugas akhir ini adalah fungsi persamaan non-linear dengan variabel tunggal.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menentukan persamaan iterasi modifikasi metode King.
2. Menentukan konvergensi dan simulasi numerik dari hasil modifikasi dari persamaan (1.4) dengan menggunakan interpolasi kuadratik.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian dari tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Menambah pengetahuan penulis mengenai metode king dalam menentukan solusi persamaan nonlinier.
2. Memperkaya perbendaharaan metode numerik dalam menyelesaikan persoalan nonlinier.
3. Sebagai acuan untuk mengembangkan metode lain guna menyelesaikan persamaan nonlinier.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan skripsi ini mencakup lima bab yaitu :

BAB I **PENDAHULUAN**

Bab ini berisi tentang latar belakang, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan dan manfaat penelitian.

BAB II **LANDASAN TEORI**

Bab ini berisi tentang teori-teori dasar yang digunakan dalam penelitian.

BAB III **METODOLOGI PENELITIAN**

Bab ini berisi tentang metodologi penelitian yang digunakan dalam skripsi ini.

BAB IV **HASIL DAN PEMBAHASAN**

Bab ini berisi tentang pembahasan bagaimana bentuk rumusan baru dari persamaan (1.4) dengan setelah dimodifikasi, serta bagaimana bentuk orde konvergensinya. Selain itu dilengkapi dengan simulasi numerik.

BAB V **KESIMPULAN DAN SARAN**

Bab ini berisi tentang kesimpulan dan saran.

BAB II
LANDASAN TEORI

2.1. Deret Taylor

Deret Taylor merupakan deret berbentuk polinomial. Oleh karena itu, Deret Taylor sering dilibatkan dalam mengekspansi fungsi-fungsi atau perasamaan nonlinear yang rumit.

Teorema 2.1. Deret Taylor (Smith, 2002). Misalkan n adalah bilangan bulat positif dan fungsi f adalah fungsi yang terdiferensial hingga turunan $ke\text{-}n+1$ dengan $f^{(n+1)}$ kontinu di semua nilai pada suatu selang $(c-r, c+r)$ untuk $(r>0)$. Kemudian, untuk $x \in (c-r, c+r)$ maka

$$f(x) = f(c) + f^{'}(c)(x-c) + \frac{f^{''}(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f^{'''}(c)}{3!}(x-c)^3 + \cdots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c) + R_n(x) \tag{2.1}$$

dengan

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} \tag{2.2}$$

dimana terdapat titik ξ antara x dan c.

Persamaan (2.2) merupakan galat dari persamaan Taylor. Oleh karena itu, jika $P_n(x)$ adalah persamaan Taylor, maka

$$P(x) = f(c) + f^{'}(c)(x-c) + \frac{f^{''}(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f^{'''}(c)}{3!}(x-c)^3 + \cdots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c) \tag{2.3}$$

dan persamaan (2.1) dapat ditulis lagi dalam bentuk

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \tag{2.4}$$

Bukti: Misalkan sebuah polinomial berderajat n dengan fungsi f dan memiliki selang $(c-r, c+r)$ dimana $(r>0)$. Maka untuk setiap $x \in (c-r, c+r)$ maka

$$f(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots + a_n(x-c)^n$$

$$f(x) = \sum_{n}^{\infty} a_n (x-c)^n \tag{2.5}$$

Jika persamaan (2.5) diturunkan secara berurutan maka

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + 4a_4(x-c)^3 + \cdots + a_n n(x-c)^{n-1}$$

$$f''(x) = 2a_2 + 2\cdot 3a_3(x-c) + 2\cdot 3\cdot 4a_3(x-c)^2 + \cdots + a_n n(n-1)(x-c)^{n-2}$$

$$f'''(x) = 2\cdot 3a_3 + 2\cdot 3\cdot 4a_4(x-c) + \cdots + a_n n(n-1)(n-2)(x-c)^{n-3}$$

$$\vdots$$

dan seterusnya. Subtitusikan $x = c$ ke persamaan di atas maka

$$f(c) = a_0$$

$$f'(c) = a_1$$

$$f''(c) = 2a_2$$

$$f'''(c) = 2\cdot 3a_3$$

$$\vdots$$

dan seterusnya, sehingga secara lebih umum lagi

$$f^{(n)}(c) = n!a_n$$

dan

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \tag{2.6}$$

Oleh karena itu, jika persamaan (2.6) disubtitusikan ke dalam persamaan (2.5) maka

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

Selanjutnya dapat dapat diurai menjadi persamaan (2.3) yang disebut dengan *Deret Taylor*. Kemudian untuk membuktikan galatnya, definisikan fungsi $R_n(x)$ dihimpunan terbuka *I* dengan

$$R_n(x) = f(x) - f(c) - f'(c)(x-c) - \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

Kemudian misalkan x dan c konstanta, dan definisikan fungsi baru g pada himpunan terbuka I dengan

$$g(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n$$
$$- R_n(x)\frac{(x-t)^{n+1}}{(x-c)^{n+1}}$$

Jika disubtitusikan $t = x$ jelaslah bahwa $g(x) = 0$, dan

$$g(c) = f(x) - f(c) - f'(t)(x-c) - \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$
$$- R_n(x)\frac{(x-c)^{n+1}}{(x-c)^{n+1}}$$
$$= R_n(x) - R_n(x) = 0$$

Oleh karena x dan c adalah titik pada himpunan terbuka I yang menyebabkan $g(x) = g(c) = 0$ maka dapat digunakan teorema nilai rata-rata untuk turunan. Untuk itu, terdapat sebuah bilangan real ξ di antara x dan c sedemikian rupa hingga $g'(\xi) = 0$. Selanjutnya dengan menerapkan aturan perkalian dengan berulang kali, diperoleh turunan $g(t)$ dengan bentuk:

$$g'(t) = 0 - f'(t) - \left(f'(t)(-1) + (x-t)f''(t)\right) - \frac{1}{2!}[f''(t)2(x-t)(-1) + (x-t)^2$$
$$f'''(t)] - \cdots - \frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}(-1) + (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\right)$$
$$- R_n(x)\frac{(n+1)(x-t)^n(-1)}{(x-c)^{n+1}}$$

$$= -\frac{1}{n!}[(x-t)^n f^{(n+1)}(t)] - (n+1)R_n(x)\frac{(x-t)^n}{(x-c)^{n+1}} \qquad (2.7)$$

Jadi, berdasarkan teorema nilai rata-rata untuk turunan, terdapat suatu nilai ξ di antara x dan c sedemikian sehingga,

$$0 = g'(\xi) = -\frac{1}{n!}\left((x-\xi)^n f^{(n+1)}(\xi)\right) + (n+1)R_n(x)\frac{(x-\xi)^n}{(x-c)^{n+1}}$$

Kemudian diperoleh

$$\frac{1}{n!}\left((x-\xi)^n f^{(n+1)}(\xi)\right) = (n+1)R_n(x)\frac{(x-\xi)^n}{(x-c)^{n+1}}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

Sehingga, persamaan (2.2) terbukti.

2.2. Orde Hampiran

Terdapat fungsi *f*(*h*) yang rumit, kemudian digantikan kedalam fungsi yang lebih sederhana, misalkan $f(h)$ dihampiri dengan fungsi *p*(*h*). Selisih antara fungsi *f*(*h*) dan *p*(*h*) disebut *error* yang terjadi dalam aproksimasi oleh fungsi *p*(*h*) sebagai $O(h^n)$.

Definisi 2.1. Orde Hampiran (Mathews, 1992). Misalkan nilai fungsi *f*(*h*) diaproksimasi oleh suatu fungsi *p*(*h*). Jika terdapat sebuah bilangan konstanta rill $K>0$ dan sebuah bilangan bulat positif *n* sedemikian hingga

$$\frac{|f(h)-p(h)|}{|h^n|} \leq K$$

untuk *h* yang cukup kecil, maka dapat dikatakan bahwa *p*(*h*) mengaprokmasi *f*(*h*) dengan orde aproksimasi $O(h^n)$ dan dapat ditulis

$$F(h) = p(h) + O(h^n) \qquad (2.8)$$

Jika persamaan (2.8) ditulis dalam bentuk $|f(h)-p(h)| \leq K|h^n|$ maka notasi $O(h^n)$ berada pada posisi $K|h^n|$. Hal ini disarankan untuk menggunakan polinomial Taylor sebagai *p*(*h*) untuk mengaproksimasi fungsi *f*(*h*) pada orde *n.* Selisih yang diperoleh dari aproksimasi polinomial Taylor dapat ditulis dalam bentuk $O(h^{n+1})$. Jika bentuk selisih ini konvergen ke nol dan h^{n+1} konvergen ke nol, maka hubungan ini dapat dinyatakan sebagai

$$O(h^{n+1}) \approx Kh^{n+1} \approx \frac{f^{(n+1)}c}{(n+1)!}h^{n+1},$$

dengan *h* yang cukup kecil.

Operasi perhitungan pada orde hampiran adalah sebagai berikut;

1) $O(h^p)+O(h^p)=O(h^p)$

2) $O(h^p)+O(h^q)=O(h^r)$, dimana r = min{p,q}

3) $O(h^p)\cdot O(h^q)=O(h^s)$, dimana $s = p + q$

2.3. Orde Konvergensi

Orde konvergensi merupakan suatu tingkat percepatan dalam penyelesaian persamaan nonlinear $f(x)=0$. Definisi yang menerangkan tentang orde konvergensi adalah sebagai berikut:

Definisi 2.2. Orde Konvergensi (Mathews, 1992). Misalkan $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ adalah barisan yang konvergen ke α, dan diberikan $e_n = x_n - \alpha$ untuk $n \geq 0$. Terdapat $K \neq 0$ dan $p > 0$ sedemikian hingga

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^p}=\lim_{n\to\infty}\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p}=K \tag{2.9}$$

Persamaan (2.9) dapat dikatakan $\{x_n\}$ konvergen α dengan orde konvergensi p.

Jika $p=1$ maka $\{x_n\}$ memiliki orde konvergensi linier, jika $p=1$, maka $\{x_n\}$ memiliki orde konvergensi kuadratik, dan seterusnya. Untuk nilai n yang besar maka persamaan (2.9) menjadi

$$\frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^p}\approx K$$

sehingga,

$$|x_{n+1}-\alpha|\approx K|x_n-\alpha|^p$$

Apabila notasi $e_n = x_n - \alpha$ merupakan notasi untuk nilai tingkat kesalahan pada iterasi ke-n, pada suatu metode yang menghasilkan suatu barisan $\{x_n\}$, maka suatu persamaan

$$e_{n+1}=Ce_n^p+O(e_n^{p+1}), \tag{2.10}$$

dapat disebut sebagai persamaan tingkat kesalahan, sedangkan nilai p pada persamaan (2.10) menunjukkan orde konvergensinya.

Definisi 2.3. Computational Order of Convergence (Weerakoon, 2000). Misalkan α adalah akar dari $f(x)$, dan andaikan x_{n+1}, x_n dan x_{n-1} berturut-turut alalah iterasi yang dekat dengan α. Maka, *Computational Order of Convergence* (COC) ρ dapat diaproksimasikan dengan menggunakan rumus

$$\rho \approx \frac{\ln\left|(x_{n+1}-\alpha)/(x_n-\alpha)\right|}{\ln\left|(x_n-\alpha)/(x_{n-1}-\alpha)\right|} \tag{2.11}$$

oleh karena $x_{n+1}-\alpha = e_{n+1}$, maka persamaan (2.11) dapat ditlis kembali menjadi

$$\rho \approx \frac{\ln\left|(e_{n+1})/(e_n)\right|}{\ln\left|(e_n)/(e_{n-1})\right|} \tag{2.12}$$

Berikut ini merupakan beberapa contoh dalam menentukan nilai COC:

Contoh 2.1.

Diberikan fungsi $f(x) = 2-3x+x^3$, dengan menggunakan metode Newton tentukan iterasi untuk menemukan akar tunggal $\alpha = -2$ serta konvergensi fungsi tersebut dengan nilai awal $x_0 = -2.4$ dan toleransi $e = 10^{-14}$.

Penyelesaian.

Tabel 2.1. Hasil Iterasi dan COC Metode Newton dengan Akar Tunggal

Iterasi	x_n	e_n	*COC*
0	-2,40000000000000	0,40000000000000	1,84136997088726
1	-2,07619047619048	0,07619047619048	1,97712790740528
2	-2,00359601067566	0,00359601067566	1,99941129295105
3	-2,00000858997222	0,00000858997222	TTd
4	-2,00000000004919	0,00000000004919	TTd

TTd = Tidak Terdefinisi

Tabel 2.1 menunjukkan bahwa metode Newton dengan akar tunggal memiliki konvergensi kuadratik dengan $\rho \approx 2$.

Selanjutnya nilai COC yang linier ditentukan oleh contoh berikut:

Contoh 2.2.

Diberikan fungsi $f(x) = 2-3x+x^3$, dengan menggunakan metode Newton tentukan iterasi untuk menemukan akar ganda $\alpha = 1$ serta konvergensi fungsi tersebut dengan nilai awal $x_0 = 1.1$ dan toleransi $e = 10^{-14}$.

Penyelesaian.

Tabel 2.1. Hasil Iterasi dan COC Metode Newton dengan Akar Ganda

Iterasi	x_n	e_n	COC
0	1,10000000000000	0,10000000000000	1,01111061394528
1	1,05079365079365	0,05079365079365	1,00586501130259
2	1,02560649990991	0,02560649990991	1,00301626286711
3	1,01285720028519	0,01285720028519	1,00152994176511
4	1,00644228778349	0,00644228778349	1,00077053789456
5	1,00322459137623	0,00322459137623	1,00038667533270
6	1,00161316079244	0,00161316079244	1,00019369106717
7	1,00080679707878	0,00080679707878	1,00009693400318
8	1,00040345276101	0,00040345276101	1,00004849343685

Tabel 2.1 menunjukkan bahwa metode Newton dengan akar ganda memiliki konvergensi linier dengan $\rho \approx 1$.

2.4. Metode Newton dan Konvergensinya

Metode Newton berasal dari turunan deret Taylor orde pertama. Metode ini merupakan salah satu metode klasik yang sering digunakan untuk mencari akar-akar persamaan nonlinier. Metode ini cukup populer, itu terbukti dengan banyaknya para peneliti yang mengembangkan metode ini menjadi metode yang lebih baik untuk konvergensinya.

Misalkan fungsi f dapat diekspansi di sekitar $x = x_n$ menggunakan deret Taylor dengan x_n pendekatan $f(x) = 0$, jika $f(x)$ diekspansi di sekitar $x = x_n$ sampai orde pertama, maka diperoleh

$$f(x) = f(x_n) + (x - x_n) f'(x_n) \tag{2.13}$$

Karena $f(x) = 0$, selanjutnya distribusikan ke persamaan (2.13) dengan mengambil $x = x_{n+1}$ sehingga

$$0 = f(x_n) + (x_{n+1} - x_n) f'(x_n)$$

$$(x_{n+1} - x_n) f'(x_n) = -f(x_n)$$

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad n = 0,1,2,... \tag{2.14}$$

Persamaan (2.14) merupakan persamaan umum metode Newton dan untuk menentukan orde konvergensinya ditunjukkan oleh teorema berikut,

Teorema 2.3. Misalkan $f(x)$ adalah fungsi bernilai rill yang mempunyai turunan pertama, kedua dan ketiga pada interval (a,b). Jika $f(x)$ mempunyai akar α pada interval (a,b) dan x_0 adalah nilai tebakan awal yang mendekati akar α, maka persamaan (2.12) memiliki orde konvergensi tingkat dua dengan persamaan error

$$e_{n+1} = C_2 e_n^2 + O(e_n^3)$$

Bukti: Misalkan α adalah akar dari $f(x)$, maka $f(\alpha) = 0$. Asumsikan $f'(x) \neq 0$ dan $x_n = \alpha + e_n$. Selanjutnya dengan menggunkan rumus ekspansi Taylor untuk mengaproksimasi fungsi f di sekitar x_n, diperoleh

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f(\alpha + e_n) \\ &= f(\alpha) + f'(\alpha)e_n + \frac{1}{2!} f''(\alpha)e_n^2 + \frac{1}{3!} f'''(\alpha)e_n^3 + O(e_n^4) \end{aligned} \tag{2.15}$$

Karena $f(\alpha)$=0, maka dengan melakukan manipulasi aljabar pada persamaan (2.15) diperoleh

$$f(x_n) = f'(\alpha)\left(e_n + \frac{1}{2!}\frac{f''(\alpha)e_n^2}{f'(\alpha)} + \frac{1}{3!}\frac{f'''(\alpha)e_n^3}{f'(\alpha)} + O(e_n^4) \right) \tag{2.16}$$

misalkan $C_j = \frac{1}{j!}\frac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$ $\quad j = 1,2,3,\cdots$ maka persamaan (2.16) dapat ditulis kembali menjadi

$$f(x_n) = f'(\alpha)\left(e_n + C_2 e_n^2 + C_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right) \tag{2.17}$$

Dilakukan cara yang sama untuk mendapatkan hasil $f'(x_n)$ sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} f'(x_n) &= f'(\alpha + e_n) \\ &= f'(\alpha)e_n + f^{(2)}(\alpha)e_n^2 + \frac{1}{2!} f^{(3)}(\alpha)e_n^3 + O(e_n^4) \\ &= f'(\alpha)\left(1 + \frac{f^{(2)}(\alpha)e_n}{f'(\alpha)} + \frac{1}{2!}\frac{f^{(3)}(\alpha)e_n^2}{f'(\alpha)} + O(e_n^3) \right) \\ &= f'(\alpha)\left(1 + 2C_2 e_n + 3C_3 e_n^2 + O(e_n^3)\right) \end{aligned} \tag{2.18}$$

Selanjutnya dilakukan pembagian persamaan (2.17) oleh persamaan (2.18)

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'(\alpha)\left(e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3 + O(e_n^4)\right)}{f'(\alpha)\left(1 + 2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3)\right)}$$

$$= \frac{\left(e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3 + O(e_n^4)\right)}{\left(1 + 2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3)\right)} \tag{2.19}$$

Dengan menggunakan ekpansi deret dalam, maka persamaan (2.19) dapat dibentuk menjadi

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \left(e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3 + O(e_n^4)\right) \times \left(1 + 2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3)\right)^{-1}$$

$$= \left(e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3 + O(e_n^4)\right) \times \left(1 - \left(2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3)\right) + \left(2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3)\right)^2 - \ldots\right)$$

$$= \left(e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3 + O(e_n^4)\right) \times \left(1 - \left(2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3)\right) + \left(4C_2^2e_n^2 + \ldots\right)\right)$$

$$= \left(e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3 + O(e_n^4)\right) \times \left(1 - 2C_2e_n + \left(4C_2^2 - 3C_3\right)e_n^2 + O(e_n^3)\right)$$

sehingga diperoleh,

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - C_2e_n^2 + O(e_n^3) \tag{2.20}$$

Kemudian dengan mensubtitusikan persamaan (2.20) ke persamaan umum Newton akan menghasilkan

$$x_{n+1} = x_n - \left(e_n - C_2e_n^2 + O(e_n^3)\right).$$

Oleh karena $x_n = e_n + \alpha$ maka $x_{n+1} = e_{n+1} + \alpha$, sehingga diperoleh,

$$e_{n+1} + \alpha = e_n + \alpha - \left(e_n + C_2e_n^2 + O(e_n^3)\right)$$

$$e_{n+1} = C_2e_n^2 + O(e_n^3) \tag{2.21}$$

Berdasarkan Teorema 2.3, metode Newton memiliki orde konvergensi kuadratik.

2.5. Metode King dan Orde Konvergensinya

Metode King merupakan metode yang ditemukan oleh F. King Richard pada tahun 1973 dalam jurnalnya yang berjudul *A Family of Fourth Order Methods for Nonlinier Equation* dengan bentuk

$$x_{n+1} = y_n - \frac{f(x_n) + \beta f(y_n)}{f(x_n) + (\beta - 2) f(y_n)} \frac{f(y_n)}{f'(x_n)} \tag{2.22}$$

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2.23}$$

Dengan mengambil $\beta = -0.5$ maka pada persamaan (2.22) menjadi

$$x_{n+1} = y_n - \frac{2f(x_n) - f(y_n)}{2f(x_n) - 5f(y_n)} \frac{f(y_n)}{f'(x_n)} \tag{2.24}$$

dengan y_n ditunjukan persamaan (2.23).

Misalkan $f(x) = 0$ dan α adalah akar dari fungsi $f(x)$ tersebut, maka $f(\alpha) = 0$ dan asumsikan bahwa $f(\alpha) \neq 0$. Dengan menggunakan ekspansi taylor untuk $f(x_n)$ di sekitar $x = \alpha$ diperoleh

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f(\alpha + e_n) \\ &= f(\alpha) + f'(\alpha)e_n + \frac{1}{2!} f''(\alpha)e_n^2 + \frac{1}{3!} f'''(\alpha)e_n^3 + O(e_n^4). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Karena $f(\alpha) = 0$, maka dengan melakukan manipulasi aljabar pada persamaan (2.25) diperoleh

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f'(\alpha)\left(e_n + \frac{1}{2!}\frac{f''(\alpha)e_n^2}{f'(\alpha)} + \frac{1}{3!}\frac{f'''(\alpha)e_n^3}{f'(\alpha)} + O(e_n^4) \right) \\ &= f'(\alpha)\left(e_n + C_2 e_n^2 + C_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right). \end{aligned} \tag{2.26}$$

Sedangkan untuk $f'(x_n)$ dapat diperoleh dengan mengekspansinya di sekitar $x = \alpha$ sehingga

$$\begin{aligned} f'(x_n) &= f'(\alpha)\left(1 + \frac{f''(\alpha)e_n}{f'(\alpha)} + \frac{1}{2!}\frac{f'''(\alpha)e_n^2}{f'(\alpha)} + O(e_n^3) \right) \\ &= f'(\alpha)\left(1 + 2C_2 e_n + 3C_3 e_n^2 + O(e_n^3)\right) \end{aligned} \tag{2.27}$$

dan untuk

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'(\alpha)\left(e_n + C_2 e_n^2 + C_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right)}{f'(\alpha)\left(1 + 2C_2 e_n + C_3 e_n^2 + O(e_n^3)\right)} \tag{2.28}$$

sehingga

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$y_n = \alpha + e_n - \left(e_n - C_2 e_n^2 + 2(C_2^2 - C_3)e_n^3 + O(e_n^4)\right)$$

$$y_n = \alpha + C_2 e_n^2 - 2(C_2^2 - C_3)e_n^3 + O(e_n^4) \tag{2.29}$$

dan dengan mengekpansikan $f(y_n)$ dengan deret taylor maka diperoleh

$$f(y_n) = f'(\alpha)\left(C_2 e_n^2 + 2(C_2^2 - C_3)e_n^3 + O(e^4)\right) \tag{2.30}$$

Untuk persamaan

$$\begin{aligned} 2f(x_n) - f(y_n) &= 2\left(f'(\alpha)\left(e_n + C_2 e_n^2 + C_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right)\right) - f'(\alpha)\left(C_2 e_n^2 + 2(C_2^2 - C_3)e_n^3 + O(e^4)\right) \\ &= f'(\alpha)\left(2e_n + C_2 e_n^2 + 2C_2^2 e_n^3 + O(e^4)\right) \\ &= 2e_n f'(\alpha)\left(1 + \frac{1}{2}C_2 e_n + C_2^2 e_n^2 + O(e^3)\right) \end{aligned} \tag{2.31}$$

dan untuk

$$\begin{aligned} 2f(x_n) - 5f(y_n) &= 2\left(f'(\alpha)\left(e_n + C_2 e_n^2 + C_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right)\right) - 5f'(\alpha)\left(C_2 e_n^2 + 2(C_2^2 - C_3)e_n^3 + O(e^4)\right) \\ &= f'(\alpha)\left(2e_n - 3C_2 e_n^2 + (10C_2^2 - 8C_3)e_n^3 + O(e^4)\right) \\ &= 2e_n f'(\alpha)\left(1 - \frac{3}{2}C_2 e_n + (5C_2^2 - 4C_3)e_n^2 + O(e^3)\right) \end{aligned} \tag{2.32}$$

sehingga

$$\frac{2f(x_n) - f(y_n)}{2f(x_n) - 5f(y_n)} = \frac{2e_n f'(\alpha)\left(1 + \frac{1}{2}C_2 e_n + C_2^2 e_n^2 + O(e^3)\right)}{2e_n f'(\alpha)\left(1 - \frac{3}{2}C_2 e_n + (5C_2^2 - 4C_3)e_n^2 + O(e^3)\right)}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{2}C_2 e_n + C_2^2 e_n^2 + O(e^3)}{1 - \frac{3}{2}C_2 e_n + (5C_2^2 - 4C_3)e_n^2 + O(e^3)}$$

Maka, dengan menggunakan ekspansi deret dalam sehingga bentuk

$$\begin{aligned} \frac{2f(x_n) - f(y_n)}{2f(x_n) - 5f(y_n)} &= \left(1 + \frac{1}{2}C_2 e_n + C_2^2 e_n^2 + O(e^3)\right) \times [1 - \left(-\frac{3}{2}C_2 e_n + (5C_2^2 - 4C_3)e_n^2 + O(e^3)\right) \\ &\quad + \left(-\frac{3}{2}C_2 e_n + (5C_2^2 - 4C_3)e_n^2 + O(e^3)\right)^2 + \cdots] \\ &= 1 + 2C_2 e_n - (2C_2^2 - 4C_3)e_n^2 + O(e^3) \end{aligned} \tag{2.33}$$

Selanjutnya, dengan cara yang sama bagi persamaan (2.30) dengan persamaan (2.27) sehingga diperoleh;

$$\frac{f(y_n)}{f^{'}(x_n)} = C_2 e_n^2 + (2C_3 - 4C_2^2)e_n^3 + O(e^4) \qquad (2.34)$$

Kemudian subtitusikan persamaan (2.30), (2.33) dan (2.34) ke persamaan (2.25) sehingga diperoleh

$$x_{n+1} = \alpha - C_2 C_3 e_n^4 + O(e_n^5) \qquad (2.35)$$

Karena $x_{n+1} = e_{n+1} + \alpha$, maka persamaan (2.35) menjadi

$$e_{n+1} + \alpha = \alpha - C_2 C_3 e_n^4 + O(e_n^5)$$

$$e_{n+1} = C_2 C_3 e_n^4 + O(e_n^5) \qquad (2.36)$$

Persamaan (2.36) merupakan orde konvergensi dari persamaan (2.25).

2.6. Interpolasi

Interpolasi adalah proses penentuan dan evaluasi fungsi yang mana grafik atau kurvanya diperoleh dari sekumpulan titik. Interpolasi fungsi biasanya diperlukan untuk menyelasaikan persoalan dari teori hampiran. Interpolasi yang akan digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

2.6.1. Interpolasi Linier

Misalkan diberikan dua titik $(x_n, f^{'}(x_n))$ dan $(y_n, f^{'}(y_n))$, kemudian misalkan polinom yang menginterpolasi kedua titik itu adalah persamaan garis lurus yang berbentuk,

$$P_1(x) = bx + c \qquad (2.37)$$

Koefisien *b* dan *c* dicari dengan proses mengalihan $(x_n, f^{'}(x_n))$ dan $(y_n, f^{'}(y_n))$ ke dalam persamaan (2.37), diperoleh dua persamaan linear,

$$f^{'}(x_n) = b(x_n) + c$$

$$f^{'}(y_n) = b(y_n) + c$$

dan dengan mengeleminasi kedua persamaan tersebut, diperoleh

$$b = \frac{f'(x_n) - f'(y_n)}{x_n - y_n} \tag{2.38}$$

dan

$$c = \frac{x_n f'(y_n) - y_n f'(x_n)}{x_n - y_n} \tag{2.39}$$

Subtitusikan persamaan (2.38), dan (2.39) ke dalam persamaan (2.37), maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= \frac{f'(x_n) - f'(y_n)}{x_n - y_n} x + \frac{x_n f'(y_n) - y_n f'(x_n)}{x_n - y_n} \\
&= \frac{xf'(y_n) - xf'(x_n) + x_n f'(y_n) - y_n f'(x_n)}{x_n - y_n} \\
&= \frac{x_n f'(y_n) - y_n f'(y_n) + y_n f'(y_n) - y_n f'(x_n) + xf'(y_n) - xf'(x_n)}{x_n - y_n} \\
&= \frac{(x_n - y_n) f'(y_n) + f'(x_n)(x - y_n) - (x - y_n) f'(y_n)}{x_n - y_n} \\
&= f'(y_n) + \frac{f'(x_n) - f'(y_n)}{x_n - y_n}(x - y_n)
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Bentuk terakhir dapat diubah menjadi,

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= f'(y_n) + \frac{x - y_n}{x_n - y_n} f'(x_n) - \frac{x - y_n}{x_n - y_n} f'(y_n) \\
&= \frac{f'(y_n)(x_n - y_n) - (x - y_n) f'(y_n)}{x_n - y_n} + \frac{(x - y_n)}{x_n - y_n} f'(x_n) \\
&= \frac{(x - y_n)}{(y_n - x_n)} f'(y_n) + \frac{(x - y_n)}{(x_n - y_n)} f'(x_n)
\end{aligned} \tag{2.41}$$

2.6.2. Interpolasi Kuadratik

Misalkan diberikan dua titik $(x_n, f'(x_n))$ dan $(y_n, f'(y_n))$, kemudian misalkan polinom yang menginterpolasi kedua titik itu adalah persamaan kuadratik yang berbentuk,

$$h(x) = ax^2 + bx + c \tag{2.42}$$

Koefisien b dan c dicari dengan proses mengalihan $(x_n, f'(x_n))$ dan $(y_n, f'(y_n))$ ke dalam persamaan (2.42), diperoleh dua persamaan kuadratik,

$$f'(x_n) = a(x_n)^2 + b(x_n) + c$$

$$f'(y_n) = a(y_n)^2 + b(y_n) + c$$

dengan mengeleminasi kedua persamaan tersebut, diperoleh b dan c dengan bentuk

$$b = \frac{f'(x_n) - f'(y_n)}{x_n - y_n} - a(x_n - y_n) \tag{2.43}$$

dan

$$c = f'(x_n) + ax_n y_n - x_n \frac{f'(x_n) - f'(y_n)}{x_n - y_n} \tag{2.44}$$

Subtitusikan persamaan (2.43) dan (2.44) ke dalam persamaan (2.42), maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
h(x) &= ax^2 + \left(\frac{f'(x_n) - f'(y_n)}{x_n - y_n} - a(x_n + y_n) \right) + f'(x_n) + ax_n y_n - x_n \frac{f'(x_n) - f'(y_n)}{x_n - y_n} \\
&= ax^2 - a(x_n + y_n)x + ax_n y_n + \frac{f'(x_n) - f'(y_n)}{x_n - y_n} x + f'(x_n) - x_n \frac{f'(x_n) - f'(y_n)}{x_n - y_n} \\
&= a(x - x_n)(x - y_n) + f'(x_n) + \frac{xf'(x_n) - xf'(y_n) - x_n f'(x_n) + x_n f'(y_n)}{x_n - y_n} \\
&= a(x - x_n)(x - y_n) + f'(x_n) + \frac{f'(x_n)(x - x_n) - f'(y_n)(x - x_n)}{x_n - y_n} \\
&= a(x - x_n)(x - y_n) + f'(x_n) + \frac{f'(x_n) - f'(y_n)}{x_n - y_n}(x - x_n) \qquad (2.45)
\end{aligned}$$

Selanjutnya, persamaan (2.45) dapat diubah menjadi,

$$\begin{aligned}
h(x) &= a(x - x_n)(x - y_n) + f'(x_n) + \frac{x - y_n}{x_n - y_n} f'(x_n) - \frac{x - y_n}{x_n - y_n} f'(y_n) \\
&= a(x - x_n)(x - y_n) + f'(x_n) + \frac{f'(x_n)(x - x_n) - f'(y_n)(x - x_n)}{x_n - y_n}
\end{aligned}$$

$$= a(x-x_n)(x-y_n) + \frac{f^{'}(x_n)(x_n-y_n) + f^{'}(x_n)(x-y_n)}{x_n-y_n} + \frac{x-y_n}{y_n-x_n} f^{'}(y_n)$$

$$= a(x-x_n)(x-y_n) + \frac{(x-y_n)}{(y_n-x_n)} f^{'}(y_n) + \frac{(x-y_n)}{(x_n-y_n)} f^{'}(x_n) \qquad (2.46)$$

sehingga

$$h(x) = a(x-x_n)(x-y_n) + P_1(x) \qquad (2.47)$$

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Penulisan skripsi ini menggunakan metode *research library* (penelitian kepustakaan) yang bertujuan mengumpulkan data dan informasi yang dibutuhkan dalam penelitian yang berasal dari buku-buku, jurnal serta artikel yang berhubungan dengan penelitian untuk menyelesaikan permasalahan pada penelitian ini dengan langkah-langkah sebagai berikut.

1. Mendefinisikan metode King konvergensi orde empat dimana $\beta = -0{,}5$ dengan bentuk

$$z_n = y_n - \frac{2f(x_n) - f(y_n)}{2f(x_n) - 5f(y_n)} \frac{f(y_n)}{f'(x_n)}$$

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{3.1}$$

2. Mendefinisikan kembali persamaan (3.1) ke dalam bentuk Newton

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \tag{3.2}$$

3. Mendefinisikan Interpolasi kuadratik yang menginterpolasi titik $(x_n, f'(x_n))$ dan $(y_n, f'(y_n))$ pada persamaan $h(x) = ax^2 + bx + c$ sehingga menjadi

$$h(x) = a(x - x_n)(x - y_n) + \frac{(x - x_n)}{(y_n - x_n)} f'(y_n) + \frac{(x - y_n)}{(x_n - y_n)} f'(x_n) \tag{3.3}$$

4. Mengkontruksi formulasi yang akan diusulkan, kemudian asumsikan bahwa approksimasi $f'(x) \approx h(x)$, sehingga $f'(z_n)$ pada persamaan (3.2) dapat diapproksimasi dengan $h(x)$ pada persamaan (3.3).
5. Menganalisa orde konvergensi yang dihasilkan berdasarkan rumusan iterasi
6. Membuat Simulasi Numerik/perhitungan komputasi dengan menggunakan bahasa pemograman Matlab untuk menentukan jumlah iterasi yang digunakan pada hampiran akar-akar fungsi transenden.
7. Membandingkan dengan metode lain seperti, metode Newton, King orde empat, dan king orde enam (Neta, 1979).

BAB IV
PEMBAHASAN

4.1. Modifikasi Metode King

Pandang kembali metode iterasi King pada persamaan (2.22), kemudian definisikan kembali dalam bentuk

$$z_n = y_n - \frac{2f(x_n) - f(y_n)}{2f(x_n) - 5f(y_n)} \frac{f(y_n)}{f'(x_n)} \tag{4.1}$$

dengan

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{4.2}$$

Selanjutnya, definisikan kembali metode Newton dengan bentuk

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \tag{4.3}$$

dengan z_n didefinisikan oleh persamaan (4.3). Kemudian, definisikan kembali interpolasi kuadratik yng menginterpolasi titik $(x_n, f'(x_n))$ dan $(y_n, f'(y_n))$ pada persamaan $h(x) = ax^2 + bx + c$ sehingga menjadi

$$h(x) = a(x - x_n)(x - y_n) + \frac{(x - x_n)}{(y_n - x_n)} f'(y_n) + \frac{(x - y_n)}{(x_n - y_n)} f'(x_n) \tag{4.4}$$

Asumsikan bahwa $f'(x) \approx h(x)$, sehingga $f'(z_n)$ pada persamaan (4.3) dapat diapproksimasikan dengan $h(x)$ pada persamaan (4.4), dimana x pada $h(x)$ di diganti dengan z_n sehingga menjadi

$$f'(z_n) \approx h(z_n) = a(z_n - x_n)(z_n - y_n) + \frac{(z_n - x_n)}{(y_n - x_n)} f'(y_n) + \frac{(z_n - y_n)}{(x_n - y_n)} f'(x_n) \tag{4.5}$$

Persamaan (4.5) di atas dapat dibentuk menjadi

$$f'(z_n) \approx a(z_n - x_n)(z_n - y_n) + \frac{\left(y_n - \frac{2f(x_n) - f(y_n)}{2f(x_n) - 5f(y_n)} \frac{f(y_n)}{f'(x_n)} - x_n \right)}{\left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right) - x_n} f'(y_n)$$

$$+\frac{\left(y_n-\frac{2f(x_n)-f(y_n)}{2f(x_n)-5f(y_n)}\frac{f(y_n)}{f'(x_n)}-y_n\right)}{x_n-(x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)})}f'(x_n)$$

$$=a(z_n-x_n)(z_n-y_n)+\frac{\left(x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}-\frac{2f(x_n)-f(y_n)}{2f(x_n)-5f(y_n)}\frac{f(y_n)}{f'(x_n)}-x_n\right)}{\left(x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)-x_n}f'(y_n)$$

$$+\frac{\left(y_n-\frac{2f(x_n)-f(y_n)}{2f(x_n)-5f(y_n)}\frac{f(y_n)}{f'(x_n)}-y_n\right)}{x_n-\left(x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)}f'(x_n)$$

$$=a(z_n-x_n)(z_n-y_n)+\frac{\left(-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}-\frac{2f(x_n)-f(y_n)}{2f(x_n)-5f(y_n)}\frac{f(y_n)}{f'(x_n)}\right)}{-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}f'(y_n)$$

$$-\frac{\left(\frac{2f(x_n)-f(y_n)}{2f(x_n)-5f(y_n)}\frac{f(y_n)}{f'(x_n)}\right)}{\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}f'(x_n)$$

$$=a(z_n-x_n)(z_n-y_n)+\left(1+\frac{2f(x_n)-f(y_n)}{2f(x_n)-5f(y_n)}\frac{f(y_n)}{f'(x_n)}\right)\frac{f'(x_n)}{f(x_n)}f'(y_n)$$

$$-\left(\frac{2f(x_n)-f(y_n)}{2f(x_n)-5f(y_n)}\frac{f(y_n)}{f'(x_n)}\right)\frac{f'(x_n)}{f(x_n)}f'(x_n)$$

Oleh karena

$$y_n-z_n=\frac{2f(x_n)-f(y_n)}{2f(x_n)-5f(y_n)}\frac{f(y_n)}{f'(x_n)}$$

maka

$$f'(z_n) \approx a(z_n - x_n)(z_n - y_n) + \left(1 + (y_n - z_n)\right)\frac{f'(x_n)}{f(x_n)} f'(y_n)$$

$$- (y_n - z_n)\frac{f'(x_n)}{f(x_n)} f'(x_n)$$

$$= a(z_n - x_n)(z_n - y_n) + \frac{f'(x_n)}{f(x_n)} f'(y_n) + (y_n - z_n)\frac{f'(x_n)}{f(x_n)}\left(f'(y_n) - f'(x_n)\right)$$

sehingga

$$f'(z_n) \approx a(z_n - x_n)(z_n - y_n) + \frac{f'(x_n)}{f(x_n)}\left(f'(y_n) + (y_n - z_n)(f'(y_n) - f'(x_n))\right) \quad (4.6)$$

Kemudian, subtitusikan persamaan (4.6) kedalam persamaan (4.4) sehingga diperoleh metode iterasi King baru dengan bentuk

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{a(z_n - x_n)(z_n - y_n) + \frac{f'(x_n)}{f(x_n)}\left(f'(y_n) + (y_n - z_n)(f'(y_n) - f'(x_n))\right)}$$

$$= z_n - \frac{f(z_n)f(x_n)}{a(z_n - x_n)(z_n - y_n)f(x_n) + f'(x_n)\left(f'(y_n) + (y_n - z_n)(f'(y_n) - f'(x_n))\right)} \quad (4.7)$$

dengan z_n didefinisikan dari persamaan (4.4) dan y_n dari persamaan (4.5). Dari persamaan (4.7) dapat dibentuk tiga persamaan, yaitu:

untuk $a = 0$,

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)f(x_n)}{f'(x_n)\left(f'(y_n) + (y_n - z_n)(f'(y_n) - f'(x_n))\right)} \quad (4.8)$$

untuk $a = 1$,

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)f(x_n)}{(z_n - x_n)(z_n - y_n)f(x_n) + f'(x_n)\left(f'(y_n) + (y_n - z_n)(f'(y_n) - f'(x_n))\right)} \quad (4.9)$$

untuk $a = -1$,

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)f(x_n)}{f'(x_n)\left(f'(y_n) + (y_n - z_n)(f'(y_n) - f'(x_n))\right) - (z_n - x_n)(z_n - y_n)f(x_n)} \quad (4.10)$$

4.2. Analisa Konvergensi

Teorema 4.1. Misalkan $\alpha \in I$ adalah akar dari fungsi $f : I \to R$ untuk suatu interval terbuka *I*. Jika x_0 adalah nilai tebakan awal yang cukup dekat ke α maka metode iterasi pada persamaan (4.8) memiliki persamaan *error :*

$$e_{n+1} = \left(\frac{a}{f^{'}(\alpha)} C_2^2 C_3 - 3C_2^2 C_3 \right) e_n^7 + O(e_n^8) \qquad (4.11)$$

Bukti : Misalkan $\alpha \in I$ dimana α merupakan akar dari $f(x)$, maka $f(\alpha) = 0$ dan $f^{'}(\alpha) \neq 0$, dengan menggunakan deret Taylor diperoleh:

$$f(x_n) = f^{'}(\alpha)(e_n + C_2 e_n^2 + C_3 e_n^3 + C_4 e_n^4 + O(e_n^5) \qquad (4.12)$$

$$f^{'}(x_n) = f^{'}(\alpha)(1 + 2C_2 e_n + 3C_3 e_n^2 + 4C_4 e_n^3 + O(e_n^4) \qquad (4.13)$$

$$f^{''}(x_n) = f^{'}(\alpha)(2C_2 + 6C_3 e_n + 12C_4 e_n^2 + O(e_n^3) \qquad (4.14)$$

$$f^{'''}(x_n) = f^{'}(\alpha)(6C_3 + 14C_4 e_n + O(e_n^2) \qquad (4.15)$$

$$f^{(4)}(x_n) = f^{'}(\alpha)(14C_4 + O(e_n) \qquad (4.16)$$

dengan $C_j = \frac{1}{j!} \frac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$ dan $j = 1,2,3,\cdots$ dan $e_n = x_n - \alpha$. Selanjutnya, dari persamaan (4.12) dan (4.13) diperoleh:

$$d_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = -e_n + C_2 e_n^2 - 2(C_2^2 - C_3)e_n^3 - (7C_2 C_3 - 3C_4 + 4C_2^3)e_n^4 + O(e_n^5) \qquad (4.17)$$

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f^{'}(x_n)} \qquad (4.18)$$

$$= \alpha + C_2 e_n^2 - 2(C_2^2 - C_3)e_n^3 - (7C_2 C_3 - 3C_4 + 4C_2^3)e_n^4 + O(e_n^5) \qquad (4.19)$$

Kemudian dengan mengekspansi $f\left(x_n - \frac{f(x_n)}{f^{'}(x_n)} \right)$ terhadap x_n, diperoleh:

$$f\left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right) = f(y_n) = f(x_n) + f^{'}(x_n) d_n + \frac{1}{2!} f^{''}(x_n) d_n^2 + \frac{1}{3!} f^{'''}(x_n) d_n^3 + \frac{1}{4!} f^{(4)}(x_n) d_n^4 + O(e_n^5) \qquad (4.20)$$

Subtitusikan persamaan (4.12) - (4.16) ke persamaan (4.20) dan sederhanakan, sehingga diperoleh:

$$f(y_n) = f^{'}(\alpha)\left(C_2 e_n^2 - 2(C_2^2 - C_3)e_n^3 + (3C_4 + 5C_2^3 - 7C_2C_3)e_n^4 + O(e_n^5)\right) \quad (4.21)$$

Kemudian dengan menggunakan persamaan (4.15) dan persamaan (4.21), maka diperoleh:

$$\frac{2f(x_n) - f(y_n)}{2f(x_n) - 5f(y_n)} = 1 + 2C_2e_n - (2C_2^2 - 4C_3)e_n^2 + (6C_4 - \frac{3}{2}C_2^3)e_n^3$$
$$+\left(22C_2C_4 + \frac{111}{4}C_2^4 - 59C_3C_2^2 + 16C_3^2\right)e_n^4 + O(e^5) \quad (4.22)$$

Selanjutnya, dengan membagi persamaan (4.21) dengan persamaan (4.13) diperoleh:

$$\frac{f(y_n)}{f^{'}(x_n)} = C_2e_n^2 + (2C_3 - 4C_2^2)e_n^3 + (3C_4 + 13C_2^3 - 14C_2C_3)e_n^4 + O(e^5) \quad (4.23)$$

Subtitusikan persamaan (4.19), (4.22) dan (4.23) ke dalam persaman (4.1) sehingga diperoleh:

$$z_n = \alpha - C_2C_3e_n^4 + \left(-22C_2C_4 + 66C_2^2C_3 - \frac{73}{2}C_2^4 - 14C_3^2\right)e_n^5 + O(e_n^6) \quad (4.24)$$

Selanjutnya, dengan membagi persamaan (4.21) dengan persamaan (4.12) diperoleh

$$\frac{f(y_n)}{f(x_n)} = C_2e_n + (2C_3 - 3C_2^2)e_n^2 + (3C_4 + 8C_2^3 - 10C_2C_3)e_n^3 + O(e^4) \quad (4.25)$$

Sehingga, dengan mengalikan persamaan (4.22) dengan (4.25) diperoleh:

$$\frac{2f(x_n) - f(y_n)}{2f(x_n) - 5f(y_n)}\frac{f(y_n)}{f(x_n)} = C_2e_n - (2C_2^2 - 2C_3)e_n^2 + (3C_4 + C_2^3$$
$$-2C_2C_3)e_n^3 + (O(e_n^4)) \quad (4.26)$$

Selanjutnya, dari persamaan (4.21) diperoleh

$$f^{'}(y_n) = f^{'}(\alpha)\left(1 + 2C_2e_n^2 + 4(C_2C_3 - C_3)e_n^3 + O(e_n^4)\right) \quad (4.27)$$

Sehingga, untuk

$$\left(1+\frac{2f(x_n)-f(y_n)}{2f(x_n)-5f(y_n)}\frac{f(y_n)}{f(x_n)}\right)f^{'}(y_n)=f^{'}(\alpha)[1+C_2e_n+(C_2^2+2C_3)e_n^2$$
$$+(-C_2^3+2C_2C_3+3C_4)e_n^3+$$
$$(8C_3C_2^2-6C_2^4)e_n^4+O(e_n^5)] \qquad (4.28)$$

$$\left(\frac{2f(x_n)-f(y_n)}{2f(x_n)-5f(y_n)}\frac{f(y_n)}{f(x_n)}\right)f^{'}(x_n)=f^{'}(\alpha)[C_2e_n+(C_2^2+2C_3)e_n^2+(-C_2^3$$
$$+5C_2C_3+3C_4)e_n^3+(10C_2C_4$$
$$-7C_3C_2^2+6C_3^2+2C_2^4)e_n^4+O(e_n^5)] \qquad (4.29)$$

dan diperoleh

$$\left(1+\frac{2f(x_n)-f(y_n)}{2f(x_n)-5f(y_n)}\frac{f(y_n)}{f(x_n)}\right)f^{'}(y_n)-\left(\frac{2f(x_n)-f(y_n)}{2f(x_n)-5f(y_n)}\frac{f(y_n)}{f(x_n)}\right)f^{'}(x_n)$$
$$=f^{'}(\alpha)[1-3C_2C_3e_n^3+O(e_n^4)] \qquad (4.30)$$

Berdasarkan persaman (4.21) diperoleh

$$z_n-x_n=-e_n+C_2C_3e_n^4+O(e_n^5) \qquad (4.31)$$

$$z_n-y_n=-C_2e_n^2+2(C_2^2-C_3)e_n^4+O(e_n^5) \qquad (4.32)$$

$$a(z_n-x_n)(z_n-y_n)=a(C_2e_n^3+O(e_n^4)) \qquad (4.33)$$

Sehingga dari persamaan (4.30) – (4.33) diperoleh

$$a(z_n-x_n)(z_n-y_n)+\left(1+\frac{2f(x_n)-f(y_n)}{2f(x_n)-5f(y_n)}\frac{f(y_n)}{f(x_n)}\right)f^{'}(y_n)$$
$$-\frac{2f(x_n)-f(y_n)}{2f(x_n)-5f(y_n)}\frac{f(y_n)}{f(x_n)}f^{'}(x_n)$$
$$=f^{'}(\alpha)\left(1+\left(\frac{a}{f^{'}(\alpha)}C_2-3C_2C_3\right)e_n^3+O(e_n^4)\right) \qquad (4.34)$$

Ekspansi deret Taylor pada $f(z)$ terhadap α diberikan oleh

$$f(z)=f^{'}(\alpha)\left(1+(z_n-\alpha)+O(z_n-\alpha)^2\right) \qquad (4.35)$$

Sehingga dengan membagi persamaan (4.35) dengan persamaan (4.34) maka diperoleh

$$\frac{f(z_n)}{a(z_n - x_n)(z_n - y_n) + \left(1 + \frac{2f(x_n) - f(y_n)}{2f(x_n) - 5f(y_n)} \frac{f(y_n)}{f(x_n)}\right) f'(y_n) - \frac{2f(x_n) - f(y_n)}{2f(x_n) - 5f(y_n)} \frac{f(y_n)}{f(x_n)} f'(x_n)}$$

$$= \frac{f'(\alpha)\left(1 + (z_n - \alpha) + O(z_n - \alpha)^2\right)}{f'(\alpha)\left(1 + \left(\frac{a}{f'(\alpha)} C_2 - 3C_2C_3\right) e_n^3 + O(e_n^4)\right)}$$

$$= \frac{1 + (z_n - \alpha) + O(z_n - \alpha)^2}{1 + \left(\frac{a}{f'(\alpha)} C_2 - 3C_2C_3\right) e_n^3 + O(e_n^4)}$$

$$= (z_n - \alpha) \times [1 - \left(\frac{a}{f'(\alpha)} C_2 - 3C_2C_3\right) e_n^3 + O(e_n^4) +$$

$$\left((\frac{a}{f'(\alpha)} C_2 - 3C_2C_3) e_n^3 + O(e_n^4) \right)^2 + \cdots]$$

$$= (z_n - \alpha) + \left(-\frac{a}{f'(\alpha)} C_2^2 C_3 + 3C_2C_3\right) e_n^7 + O(e_n^8) \tag{4.36}$$

dan untuk

$$x_{n+1} = z_n - \left((z_n - \alpha) + \left(-\frac{a}{f'(\alpha)} C_2^2 C_3 + 3C_2C_3\right) e_n^7 + O(e_n^8) \right)$$

$$= \alpha + \left(\frac{a}{f'(\alpha)} C_2^2 C_3 - 3C_2C_3\right) e_n^7 + O(e_n^8) \tag{4.37}$$

Oleh karena $x_{n+1} = e_{n+1} + \alpha$, maka diperoleh,

$$e_{n+1} + \alpha = \alpha + \left(\frac{a}{f'(\alpha)} C_2^2 C_3 - 3C_2C_3\right) e_n^7 + O(e_n^8)$$

$$e_{n+1} = \left(\frac{a}{f'(\alpha)} C_2^2 C_3 - 3C_2C_3\right) e_n^7 + O(e_n^8) \tag{4.38}$$

Berdasarkan Teorema 4.1, persamaan (4.7) memiliki orde konvergensi ketujuh.

untuk $a = 0$, maka orde konvergensi persamaan (4.8)

$$e_{n+1} = -3C_2C_3 e_n^7 + O(e_n^8) \tag{4.39}$$

untuk $a = 1$, maka orde konvergensi persamaan (4.9)

$$e_{n+1} = \left(\frac{C_2^2 C_3}{f^{'}(\alpha)} - 3C_2C_3 \right) e_n^7 + O(e_n^8) \qquad (4.40)$$

dan untuk $a = -1$, maka orde konvergensi persamaan (4.10)

$$e_{n+1} = \left(-\frac{C_2^2 C_3}{f^{'}(\alpha)} - 3C_2C_3 \right) e_n^7 + O(e_n^8) \qquad (4.41)$$

Sehingga berdasarkan analisa konvergensi, semua hasil modifikasi king dengan menggunakan interpolasi kuadratik memiliki orde konvergensi ke-tujuh.

4.3. Simulasi Numerik

Pada sub bab ini, akan ditunjukkan keefektivan dari persamaan (4.7), (4.8), dan (4.9) dalam menyelesaikan persamaan nonlinier. Oleh karena itu, dilakukan simulasi numerik dengan menggunakan *processor* komputer Intel(R) Atom(TM) CPU N570 @ 1.66 GHz (4CPUs), *Operating System* Windows 7 Ultimate 32-bit (6.1, build 7600) , memori 2 GB dan melibatkan aplikasi pemograman MATLAB versi 7.0.4, dengan digit error *e* = 10^{-16} dan kriteria penghentian program komputer:

i. $|x_{n+1} - x_n| < \sqrt{e}$

ii. $|f(x_{n+1})| < \sqrt{e}$

yang bertujuan untuk membandingkan jumlah iterasi beberapa metode iteratif dalam menghampiri akar persamaan dari fungsi-fungsi berikut:

$f_1(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ $\qquad \alpha \approx 1{,}36523001341409 68$

$f_2(x) = x^2 - e^x - 3x + 2$ $\qquad \alpha \approx 0{,}2575302854398608$

$f_3(x) = xe^{x^2} - \sin^2(x) + 3\cos x + 5$ $\qquad \alpha \approx -1{,}2076478271309189$

$f_4(x) = (x-1)^3 - 2$ $\qquad \alpha \approx 2{,}2599210498948732$

$f_5(x) = (x+2)e^x - 1$ $\qquad \alpha \approx -0{,}4428544010023886$

$f_6(x) = \sin^2(x) - x^2 + 1$ $\qquad \alpha \approx 1{,}4044916482153412$

Berdasarkan hasil perhitungan komputasi atau simulasi numerik diperoleh jumlah iterasi dari berbagai metode seperti: NW dinotasikan sebagai metode Newton dengan orde kovergensi ke-dua, KN dinotasikan sebagai metode King

(1973) dengan orde konvergensi ke-empat, KBN dinotasikan sebagai metode King dengan orde konvergensi ke-enam oleh Beny Neta (1979), KM1 dinotasikan sebagai metode pada persamaan (4.9) dengan orde konvergensi ke-tujuh, KM2 dinotasikan sebagai metode pada persamaan (4.10) dengan orde konvergensi ke-tujuh, dan KM3 dinotasikan sebagai persamaan (4.11) dengan orde konvergensi ke-tujuh. Berikut ini adalah tabel perbandingan jumlah iterasi dari metode tersebut.

Tabel.4.1. Perbandingan Jumlah Iterasi

$f(x)$	x_0	Jumlah Iterasi					
		NW	KN	KBN	KM1	KM2	KM3
$f_1(x)$	-0.5 -0.3	131 53	10 57	11 26	18 7	Div 9	5 11
$f_2(x)$	3.6 7	7 9	4 5	4 5	4 5	4 5	4 4
$f_3(x)$	-3 -1.5	14 6	7 3	6 4	5 3	5 3	5 3
$f_4(x)$	-0.5 3	8 6	7 3	11 2	5 2	Div 2	17 2
$f_5(x)$	1.5 4	8 11	4 4	4 4	3 4	3 4	3 4
$f_6(x)$	3 6	6 7	4 3	3 3	3 3	2 3	3 3

Tabel 4.1 mengambarkan perbandingan jumlah iterasi dari berbagai metode, dengan menggunakan beberapa fungsi dan nilai awal yang berbeda, dimana secara umum Tabel 4.1 menunjukkan bahwa metode iterasi dengan orde yang lebih tinggi memiliki jumlah iterasi yang lebih sedikit dibandingkan metode iterasi yang mempunyai orde konvergensi lebih rendah. Meskipun demikian, pada beberapa fungsi ada yang menunjukkan orde yang lebih tinggi memiliki iterasi yang lebih banyak dibandingkan metode iterasi yang orde konvergensi yang lebih rendah, seperti pada $f_4(x)$ dengan nilai awal -0.5 KM3 dan KNB yang memiliki orde ke-tujuh dan ke-enam memiliki iterasi yang lebih banyak dibandingan KN yang memiliki orde konvergensi ke-empat. Hal ini bisa saja terjadi karena setiap metode memiliki cara tersendiri dalam menghampiri akar sebuah fungsi tergantung pada bentuk persamaan serta seberapa dekat nilai awal yang diberikan dengan nilai akar sebenarnya.

Selain dengan menggunakan iterasi, kekonvergenan dapat dilihat dengan menggunakan *Computational Order of Convergence* (COC), yakni perhitungan orde konvergensi secara numerik. Perhitungan dilakukan secara manual yang melibatkan hasil pemograman pada Tabel 4.1 dan menggunakan aplikasi *Microsoft Excel 2007,* dengan digit error e = 10^{-14}. Berikut ini adalah tabel perbandingan COC dari berbagai metode tersebut diatas.

Tabel 4.2. Perbandingan Nilai COC

$f(x)$	x_0	COC					
		NW	KN	KBN	KM1	KM2	KM3
$f_1(x)$	-0.5 -0.3	2.00 1.99	3.51 3.61	6.48 5.23	5.76 3.96	Div 6.65	6.25 5.51
$f_2(x)$	3.6 7	1.99 1.38	2.98 3.29	3.53 3.01	5.66 6.08	4.48 5.88	5.38 12.99
$f_3(x)$	-3 -1.5	1.98 2.00	4.03 3.93	5.91 6.16	6.94 7.46	6.94 7.46	6.94 7.47
$f_4(x)$	-0.5 3	2.00 2.00	5.52 3.48	5.03 TTd	5.75 TTd	Div TTd	3.70 TTd
$f_5(x)$	1.5 4	1.99 2.00	2.72 3.61	3.86 5.73	5.07 6.95	5.68 7.02	4.84 7.12
$f_6(x)$	3 6	2.00 1,99	4.88 3.49	6.10 4.25	6.46 5.24	TTd 3.69	6.57 4.63

Keterangan :

x_0 : Nilai Awal

Div : Divergen

TTd : Tidak Terdefinisi

Tabel 4.2 mengambarkan mengenai perbandingan nilai perhitungan orde konvergensi secara numerik. Pada tabel 4.2 juga menunjukkan bahwa orde konvergensi pada setiap metode berbeda-beda tergantung pada fungsi serta nilai awal yang diberikan pada setiap metode. Namun, secara umum hasil perhitungan orde konvergensi secara numerik (COC) metode iterasi yang memiliki orde konvergensi yang lebih tinggi secara teori menunjukkan nilai COC lebih tinggi dibandingkan metode iterasi yang memiliki orde konvergensi yang lebih redah secara teori.

BAB V
KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Metode King memiliki orde konvergensi ke-empat, setelah dimodifikasi dengan menggunakan interpolasi kuadratik diperoleh orde konvergensi ketujuh dan didapat metode iterasi King baru dengan bentuk:

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)f(x_n)}{a(z_n - x_n)(z_n - y_n)f(x_n) + f'(x_n)(f'(y_n) + (y_n - z_n)(f'(y_n) - f'(x_n)))}$$

$$z_n = y_n - \frac{2f(x_n) - f(y_n)}{2f(x_n) - 5f(y_n)}\frac{f(y_n)}{f'(x_n)}$$

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

dengan persamaan error

$$e_{n+1} = \left(\frac{a}{f'(\alpha)}C_2^2C_3 - 3C_2C_3\right)e_n^7 + O(e_n^8)$$

Selanjutnya, dengan mengambil $a = 0$, $a = 1$ dan $a = -1$ diperoleh tiga persamaan baru dengan bentuk

KM1 (King modifikasi 1);

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)f(x_n)}{f'(x_n)(f'(y_n) + (y_n - z_n)(f'(y_n) - f'(x_n)))}$$

dengan persamaan error

$$e_{n+1} = -3C_2C_3e_n^7 + O(e_n^8)$$

KM2 (King modifikasi 2);

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)f(x_n)}{(z_n - x_n)(z_n - y_n)f(x_n) + f'(x_n)(f'(y_n) + (y_n - z_n)(f'(y_n) - f'(x_n)))}$$

dengan persamaan error

$$e_{n+1} = \left(\frac{C_2^2C_3}{f'(\alpha)} - 3C_2C_3\right)e_n^7 + O(e_n^8)$$

KM3 (King midifikasi 3);

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)f(x_n)}{f^{'}(x_n)(f^{'}(y_n) + (y_n - z_n)(f^{'}(y_n) - f^{'}(x_n))) - (z_n - x_n)(z_n - y_n)f(x_n)}$$

dengan persamaan error

$$e_{n+1} = \left(-\frac{C_2^2 C_3}{f^{'}(\alpha)} - 3C_2C_3 \right) e_n^7 + O(e_n^8)$$

Berdasarkan hasil simulasi numerik pada Tabel 4.1 dan Tabel 4.2, KM1, KM2 dan KM3 secara umum memiliki hasil iterasi yang lebih sedikit serta memiliki nilai COC yang lebih tinggi dibandingkan metode iterasi Newton, King (1973) dan King Neta (1979). Sehingga, metode ini lebih efektif dalam menyelesaikan persamaan nonlinier dibandingkan metode lainnya yang memiliki orde konvergensi yang lebih rendah.

5.2 Saran

Tugas akhir ini, penulis diilhami dari proses yang dilakukan oleh Chun (2007) yang memodifikasi metode jarrat menggunakan interpolasi kuadratik. Pada skripsi ini, penulis menggunakan COC *(Computational Order of Convergence)* dalam memperlihatkan orde konvergensi secara numerik, disarankan pada pembaca untuk meneliti lebih lanjut dalam memperlihatkan orde konvergensi secara numerik dengan menggunakan ACOC *(Approksimated Computational Order of Convergence)* dan ECOC (*Ekstrapolated Computational Order of Convergence).*

DAFTAR PUSTAKA

Burden, Richard L, *Numerical Analysis Fifth Edition,* PWS Publishing Company, United States of America, 1993

Chapra, Steven, C. dan Raymond P. Canale, *Numerical Methods for Engineers, fifth edition,* MC Graw Hill, Singapura, 2006

Chun, Changbum, "Some Improvement of Jarratt's Method with Sixth-order Convergence", *Applied Mathematics and Computation.* Vol. 190, halaman 1432-1437, 2007

Hou, Linke. dan Xiaowu li. "Twelfth Order Method for Nonlinier Equation". *IJRRAS.* April 2010

M. Grau-Sánchez, *et al*. "On Computational Order of Convergence of Some Multi-Precision Solvers of Nonlinier Systems of Equations".*Math.NA.* 6 Juni 2011

Mathews, John H., *Numerical Methods for Mathematics Science and Engineering, Second Edition,* Prentice-Hall International,Inc, United States of America.1992

Neta, Beny. "A Sixth Order Family of Methods for Nonlinier Equations". *Intern. J. Computer Math.* Vol. 7, Halaman 157-161, 1979

Purcell, Edwin j., Dale Varberg., Steven E. Rigdon, *Kalkulus Edisi Kedelapan. Jilid 2,* Erlangga, Jakarta. 2004

Richard, F. King, "A Family of Fourth Order Method for Nonlinier Equation", *Siam Journal on Numerical Analysis.*Vol.10, Halaman 876-879, 1973

Smith, Tobert T., dan Roland B Milton, *Calculus. Second edition,* MC Graw Hill, USA. 2002

Weerakoon, S., dan T.G.I.Fernando. "A Varian of Newton's Method with Accelerated Third-Order Convergence". *Appl.Math. Letters 13*. Halaman 87-93. 2000